



۱- یک آزمون چند گزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

(الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟

(ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

۲- ۴ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک داریم. به چند حالت می‌توانیم آن‌ها را کنار هم و به صورت یک در میان بچینیم؟

۳- یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۴- در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۵ داور ایرانی، ۳ داور اسپانیایی و ۴ داور کره‌ای قرار است کمیته‌ای ۵ نفره از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد به طوری که حداقل سه داور کره‌ای در این کمیته حضور داشته باشند؟

۵- تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این که در هیچ یک از دو پرتاب، عدد ۱ دیده نشود چه قدر است؟

۶- در پرتاب دو تاس مطلوبست احتمال آن که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ده نباشد؟

۷- در یک کتابخانه، ۱۰ کتاب علمی، ۱۰ کتاب تاریخی، ۱۵ کتاب ادبیات و ۲۰ کتاب مرجع وجود دارد، اگر در یک آتش‌سوزی، ۳۰ جلد کتاب از بین برود، احتمال آن که کتاب‌های علمی و تاریخی سالم مانده باشند، چه قدر است؟ (محاسبه‌ی عدد نهایی لازم نیست.)

۸- اگر  $P(A) = \frac{3}{8}$  و  $P(B') = \frac{3}{4}$  باشد و  $A$  و  $B$  ناسازگار باشند،  $P(A \cup B)$  را بیابید.

۹- مفاهیم زیر را تعریف کنید.

(الف) جامعه یا جامعیت

(ب) اندازه یا حجم جامعه

(ج) نمونه

(د) اندازه یا حجم نمونه

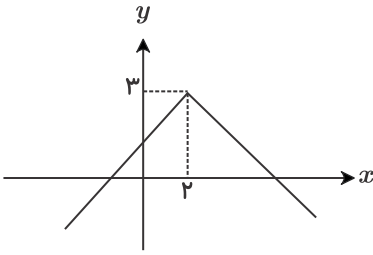
۱۰- جدول زیر را کامل کنید.

متغیر	نوع متغیر
وزن یک هلو	
کیفیت یک هلو	
اندازه طول بدن یوزپلنگ ایرانی	
اقوام ایرانی	
وضعیت آب و هوا	
دمای هوا در قله	
فشار هوا در قله کوه	



۱۱- الف) نمودار تابع قطعه‌ای  $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$  را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.

ب) شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = -|x + a| - b$  است. مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

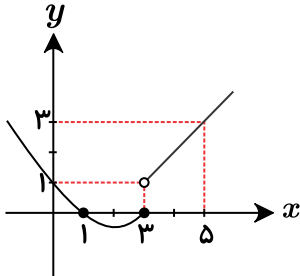


۱۲- الف) مقدار  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع زیر یک تابع ثابت با برد تک‌عضوی  $\{5\}$  باشد.

$$f(x) = (a - 1)x^2 + 6(a - b)$$

ب) اگر  $f(x) = x^2 + 2$  باشد، مقدار  $\frac{f(-3) + f(0)}{13}$  را به دست آورید.

۱۳- ضابطه تابع زیر را، که از دو بخش خطی و سهمی تشکیل شده است، بنویسید.



۱۴-  $x$  را طوری بیابید که رابطه  $f = \{(3, x^2 - 4x), (0, 1), (3, 0), (x, 2), (2, 1)\}$  یک تابع باشد.

۱۵- اگر تابعی با نمایش جبری  $f(n) = -n^2 + 3$  داده شده باشد و دامنه آن  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$  باشد، برد آن را به دست آورید.

۱۶- یک شمع ۴۲ سانتی‌متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۳ سانتی‌متر از آن می‌سوزد، تابعی برحسب زمان (ساعت) بنویسید که پس از گذشت  $t$  ساعت ارتفاع شمع را محاسبه کند. شمع پس از چند ساعت خاموش می‌شود؟

۱۷- نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط  $(1, -1)$  و  $(-2, 11)$  می‌گذرد و محور  $y$ ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید.

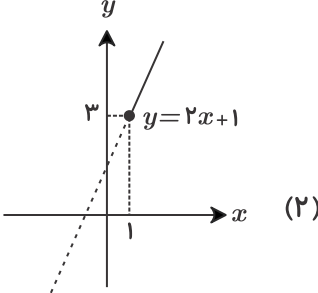
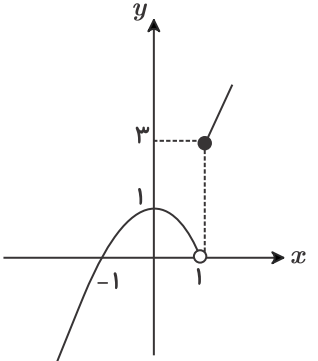
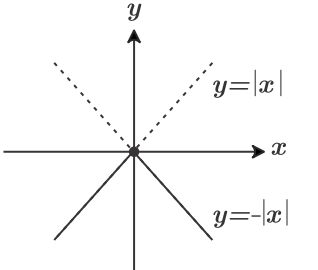
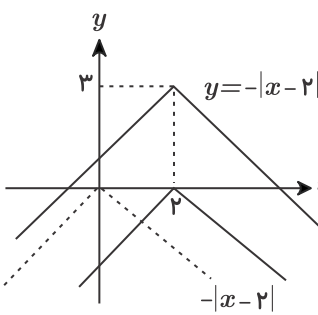


ردیف	نمره
۱	<p>الف) هر سؤال ۴ گزینه‌ای ۴ حالت (یکی از ۴ گزینه) دارد و هر سؤال ۲ گزینه‌ای ۲ حالت (بله / خیر)</p> $\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{10 \text{ تا}} \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{5 \text{ تا}} = 4^{10} \times 2^5 = (2^2)^{10} \times 2^5 = 2^{20} \times 2^5 = 2^{25}$ <p>ب) هر سؤال ۴ گزینه‌ای ۵ حالت (یکی از ۴ گزینه یا عدم پاسخ) دارد و هر سؤال ۲ گزینه‌ای ۳ حالت (بله / خیر / عدم پاسخ)</p> $\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{10 \text{ تا}} \times \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{5 \text{ تا}} = 5^{10} \times 3^5$
۲	<p>چون تعداد برابر است پس یک بار با کتاب ریاضی و بار دیگر با کتاب فیزیک شروع می‌کنیم:</p> <p>طبق اصل جمع:</p>
۳	$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = \binom{7}{2} + 7 + 1 = \frac{7 \times 6}{2} + 8 = 21 + 8 = 29$
۴	$\binom{4}{3} \times \binom{8}{2} + \binom{4}{4} \times \binom{8}{1} = 112 + 8 = 120$
۵	<p>چون تعداد حالت‌هایی که ۱ دیده نشود، زیاد است، از متمم استفاده می‌کنیم:</p> <p><math>A'</math>: پیشامد رو شدن عدد ۱ در حداقل یکی از پرتاب‌ها</p> $A' = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)(2, 1)(3, 1)(4, 1)(5, 1)(6, 1)\}$ $P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{11}{36}$ $P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow \frac{11}{36} = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{25}{36}$
۶	<p>می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ قابل تغییر است.</p> <p>چون تعداد حالت‌هایی که مجموع دو تاس بزرگ‌تر از ده <u>نباشد</u> زیاد است از متمم آن‌ها استفاده می‌کنیم یعنی حالت‌هایی که مجموع آن‌ها بزرگ‌تر از ده است:</p> $A' = \{(5, 6)(6, 5)(6, 6)\}$ $P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$
۷	<p>برای این‌که کتاب‌های علمی و تاریخی سالم بمانند باید ۳۰ جلد کتاب سوخته از بین کتب ادبیات و مرجع باشند:</p> $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{35}{30}}{\binom{55}{30}} = \frac{35!}{3!5!} = \frac{35! \times 30! \times 25!}{55! \times 3! \times 5!}$
۸	<p>با توجه به ناسازگار بودن دو مجموعه <math>A</math> و <math>B</math> داریم:</p>



ردیف	نمره																	
	۱	$P(A \cap B) = 0$ $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ <p style="text-align: right;">(صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۸ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:</p> $P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \text{ (نمره ۲۵)}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (نمره ۲۵)}$ $P(A \cap B) = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \text{ (نمره ۲۵)}$																
۹		<p>الف) مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیائی که درباره‌ی یک یا چند ویژگی آن‌ها، تحقیق صورت گیرد جامعه یا جامعیت نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامند.</p> <p>ب) تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه یا حجم جامعه گویند.</p> <p>به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.</p> <p>ج) بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شوند، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.</p> <p>د) تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه یا حجم نمونه گویند.</p> <p>به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.</p>																
۱۰		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>متغیر</th> <th>نوع متغیر</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>وزن یک هلو</td> <td>کمی پیوسته</td> </tr> <tr> <td>کیفیت یک هلو</td> <td>کیفی ترتیبی</td> </tr> <tr> <td>اندازه‌ی طول بدن یوزپلنگ ایرانی</td> <td>کمی پیوسته</td> </tr> <tr> <td>اقوام ایرانی</td> <td>کیفی اسمی</td> </tr> <tr> <td>وضعیت آب و هوا</td> <td>کیفی اسمی</td> </tr> <tr> <td>دمای هوا در قله</td> <td>کمی پیوسته</td> </tr> <tr> <td>فشار هوا در قله کوه</td> <td>کمی پیوسته</td> </tr> </tbody> </table>	متغیر	نوع متغیر	وزن یک هلو	کمی پیوسته	کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی	اندازه‌ی طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی پیوسته	اقوام ایرانی	کیفی اسمی	وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی	دمای هوا در قله	کمی پیوسته	فشار هوا در قله کوه	کمی پیوسته
متغیر	نوع متغیر																	
وزن یک هلو	کمی پیوسته																	
کیفیت یک هلو	کیفی ترتیبی																	
اندازه‌ی طول بدن یوزپلنگ ایرانی	کمی پیوسته																	
اقوام ایرانی	کیفی اسمی																	
وضعیت آب و هوا	کیفی اسمی																	
دمای هوا در قله	کمی پیوسته																	
فشار هوا در قله کوه	کمی پیوسته																	
۱۱	۱.۵	<p>الف) ابتدا سهمی <math>y = 1 - x^2</math> را رسم می‌کنیم. برای این کار کافی است، نمودار سهمی <math>y = -x^2</math> را یک واحد به بالا انتقال دهیم. سپس قسمت‌هایی که <math>x &lt; 1</math> را انتخاب می‌کنیم:</p>																



نمره	ردیف
	<p>حال خط <math>y = 2x + 1</math> را در بازه <math>x \geq 1</math> رسم می‌کنیم:</p>  <p>(۲)</p> <p>با توجه به شکل‌های (۱) و (۲) نمودار تابع به صورت زیر است:</p>  $\Rightarrow R_f = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - (1, 3)$ <p>(صفحه ۱۱۲ کتاب درسی)</p> <p>(ب) می‌دانیم نمودار <math>y = - x </math> شکل روبه‌رو است:</p>  <p>اگر نمودار <math>y = - x </math> را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد بالا ببریم، به نمودار <math>f(x)</math> می‌رسیم. چون انتقال روی محور <math>x</math> ها به صورت معکوس است. پس ضابطه <math>f</math> به صورت <math>f(x) = - x - 2  + 3</math> است، پس <math>a = -2</math> و <math>b = -3</math> است.</p>  <p>(صفحه ۱۱۴ کتاب درسی)</p> <p>راهنمای تصحیح:</p> <p>الف) رسم سهمی (۵ر۵ نمره)، رسم خط (۲٫۵ر۵ نمره)</p>



ردیف	نمره	ردیف
۱.۵	<p>(الف) اگر <math>R_f = \{k\}</math> باشد، <math>f(x) = k</math> خواهد بود؛ پس می‌نویسیم:</p> <p>حالا ضرایب دو طرف تساوی باید برابر باشند:</p> <p><math>f(x) = 5 \Rightarrow (a-1)x^2 + 6(a-b) = 5</math></p> <p><math>a-1 = 0 \Rightarrow a = 1</math> در دو طرف ضرب <math>x^2</math></p> <p><math>6(a-b) = 5 \Rightarrow 6(1-b) = 5 \Rightarrow b = \frac{1}{6}</math> عدد ثابت دو طرف</p> <p>(ب)</p> <p><math>f(-3) = (-3)^2 + 2 = 11</math> <math>\Rightarrow \frac{f(-3) + f(0)}{13} = \frac{13}{13} = 1</math></p> <p><math>f(0) = (0)^2 + 2 = 2</math></p> <p>(الف)</p> <p><math>f(x) = 5</math> (نمره ۵) <math>\Rightarrow (a-1)x^2 + 6(a-b) = 5</math> ثابت است <math>\Rightarrow</math></p> <p><math>\Rightarrow (a-1) = 0 \Rightarrow a = 1</math> (نمره ۲.۵) <math>6(a-b) = 5</math> (نمره ۲.۵) <math>\xrightarrow{a=1} 6(1-b) = 5</math></p> <p><math>\Rightarrow 1-b = \frac{5}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{6}</math> (نمره ۲.۵)</p> <p><math>f(-3) = (-3)^2 + 2 = 11</math> (نمره ۲.۵) <math>\Rightarrow \frac{f(-3) + f(0)}{13} = \frac{13}{13} = 1</math> (نمره ۲.۵)</p> <p><math>f(0) = (0)^2 + 2 = 2</math> (نمره ۲.۵)</p>	۱۲
۲	<p>با توجه به شکل و فرم کلی سهمی داریم:</p> <p><math>y = ax^2 + bx + c \Rightarrow c = 1</math></p> <p><math>\begin{cases} a(1)^2 + b(1) = -1 \\ a(3)^2 + b(3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = +3 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}</math></p> <p>معادله نیم‌خط: <math>\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-3} = 1 \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = x + b</math> شیب نیم‌خط <math>\Rightarrow</math> دو نقطه‌ای و نیم‌خط هستند <math>\begin{cases} (3, 1) \\ (5, 3) \end{cases}</math></p> <p><math>1 = 3 + b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow y = x - 2</math> (نیم خط است)</p> <p>(ب)</p> <p>با توجه به دامنه‌هایی که در شکل مشخص شده است، ضابطه را می‌نویسیم:</p> <p><math>\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 &amp; x \leq 3 \\ x - 2 &amp; x &gt; 3 \end{cases}</math></p>	۱۳
۱.۷۵	<p>(نمره ۲.۵) <math>a = -2</math>, <math>b = -3</math> (نمره ۲.۵)</p> <p>(نمره ۲.۵) برد تابع <math>\mathbb{R} - (1, 3)</math> یا <math>(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)</math></p>	۱۳



ردیف	نمره	
		<p>راهنمای تصحیح:</p> <p>با توجه به شکل و فرم کلی سهمی داریم:</p> $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow c = 1 \text{ (نمره, ۲۵)}$ $\begin{cases} a(1)^2 + b(1) = -1 \\ a(3)^2 + b(3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = +3 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow$ $6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ (نمره, ۲۵)}, b = -\frac{4}{3} \text{ (نمره, ۲۵)}$ <p>معادله نیم خط:</p> $1.75 \quad \text{دو نقطه‌ای و نیم خط هستند: } \begin{cases} (3, 1) \\ (5, 3) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب نیم خط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-3} = 1 \text{ (نمره, ۲۵)}$ <p>معادله نیم خط: <math>\Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = x + b</math></p> <p><math>(3, 1) \Rightarrow 1 = 3 + b \Rightarrow b = -2 \text{ (نمره, ۲۵)} \Rightarrow y = x - 2</math></p> $\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 & x \leq 3 \\ x - 2 & x > 3 \end{cases} \text{ (نمره, ۵)}$
		<p>برای تابع بودن اگر دو زوج مرتب مؤلفه اول برابر داشته باشند، باید مؤلفه دوم آنها نیز با هم برابر باشند.</p> <p><math>(3, x^2 - 4x) = (3, 0)</math></p> <p>قابل قبول <math>x = 4</math> غیر قابل قبول <math>x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \times</math></p> <p>با تابع بودن تناقض دارد <math>\Rightarrow (0, 1) \neq (0, 2)</math> اگر <math>x = 0</math></p> <p>با مؤلفه اول هیچ زوج مرتبی برابر نیست؛ پس قابل قبول است. اگر <math>x = 4</math></p> <p>۱۴ (صفحه ۹۹ و ۱۰۰ کتاب درسی)</p> <p>راهنمای تصحیح:</p> <p><math>(3, x^2 - 4x) = (3, 0) \text{ (نمره, ۲۵)}</math></p> $x^2 - 4x = 0 \text{ (نمره, ۲۵)} \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ غ ق ق} \\ x = 4 \text{ (نمره, ۲۵)} \end{cases}$
		<p>برای به دست آوردن برد کافی است تک تک اعضای دامنه را در ضابطه قرار دهید و مقادیر آن را بیابید. اعضای تکراری در برد یکبار نوشته می‌شوند.</p> <p><math>f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2</math></p> <p><math>f(0) = -(0)^2 + 3 = 3</math></p> <p><math>f(1) = -(1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2</math></p> <p><math>f(2) = -(2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1</math></p> <p><math>R_f = \{-1, 2, 3\}</math></p> <p>۱۵ (صفحه ۱۰۲ کتاب درسی)</p> <p>راهنمای تصحیح:</p> <p><math>f(-1) = -(-1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2 \text{ (نمره, ۲۵)}</math></p> <p><math>f(0) = -(0)^2 + 3 = 3 \text{ (نمره, ۲۵)}</math></p> <p><math>f(1) = -(1)^2 + 3 = -1 + 3 = 2 \text{ (نمره, ۲۵)}</math></p> <p><math>f(2) = -(2)^2 + 3 = -4 + 3 = -1 \text{ (نمره, ۲۵)}</math></p> <p>نوشتن برد: <math>R_f = \{-1, 2, 3\} \text{ (نمره, ۵)}</math></p>



ردیف	نمره
۱۶	<p>چون نرخ کاهش ارتفاع شمع در هر ساعت ۳ سانتی متر است، در نتیجه باید ضابطه را به صورت <math>h(t) = -3t</math> نوشت؛ البته باید ارتفاع اولیه را به ضابطه اضافه کرد، پس داریم:</p> $h(t) = -3t + 42$ <p>اگر زمان خاموش شدن شمع را بخواهیم باید <math>h(t) = 0</math> قرار بدهیم تا زمان صفر شدن ارتفاع شمع به دست آید.</p> $-3t + 42 = 0 \rightarrow t = \frac{-42}{-3} = 14$ <p>۱۴ ساعت طول می کشد تا شمع به ارتفاع صفر برسد. (صفحه ۱۰۷ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:</p> <p><math>h(t) = -3t + 42</math> (نمره ۵)</p> <p><math>h(t) = 0 = -3t + 42 \rightarrow 3t = 42 \rightarrow t = \frac{42}{3} = 14</math> ساعت <math>\rightarrow</math> ارتفاع شمع پس از ۱۴ ساعت صفر می شود (نمره ۵)</p>
۱۷	<p>فرمول کلی سهمی و معادلات درجه ۲ به صورت <math>f(x) = ax^2 + bx + c</math> است، وقتی می گوئیم محور <math>y</math>ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند؛ یعنی از نقطه <math>(0, 1)</math> می گذرد؛ پس:</p> $f(0) = 1 \rightarrow 1 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 1$ <p>با جای گذاری دو نقطه داده شده، <math>a</math> و <math>b</math> را می یابیم.</p> $f(1) = -1 \rightarrow a + b + c = -1 \xrightarrow{c=1} a + b = -2$ $f(-2) = 11 \rightarrow 4a + (-2)b + 1 = 11 \xrightarrow{c=1} 4a - 2b = 10 \rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 4a - 2b = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 1$ <p>(صفحه ۱۱۷ کتاب درسی) راهنمای تصحیح:</p> <p><math>f(x) = ax^2 + bx + c</math></p> <p><math>f(0) = 1 \rightarrow c = 1</math> (نمره ۲۵)</p> $f(1) = -1 \rightarrow a + b + 1 = -1 \rightarrow a + b = -2$ $f(-2) = 11 \rightarrow 4a - 2b + 1 = 11 \rightarrow 4a - 2b = 10 \rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ 4a - 2b = 10 \end{cases} \rightarrow a = 1$ (نمره ۲۵) <p><math>b = -3</math> (نمره ۲۵)</p> <p><math>f(x) = x^2 - 3x + 1</math> (نمره ۲۵)</p>