

«بسمه تعالی»

نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	آزمون نوبت اول: آمار و احتمال
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۲۲	تعداد صفحه: ۲	پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه
نمره	همه پاسخ‌ها را فقط با خودکار مشکی یا آبی و در کادر مشخص شده در پاسخبرگ بنویسید.			
۰/۷۵	۱	<p>درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن گاه ۴ مربع کامل نیست.</p> <p>ب) ۲ عدد اول نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.</p> <p>پ) اگر <math>A_1</math> و <math>A_2</math> دو پیشامد باشند و <math>A_1</math> زیرمجموعه <math>A_2</math> باشد، رخ دادن <math>A_1</math> رخ دادن <math>A_2</math> را نتیجه می‌دهد.</p>		
۰/۷۵	۲	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) برای به دست آوردن <math>x</math> و <math>y</math> از تساوی <math>(x-1)^2 + (2x-y)^2 = 0</math> از ترکیب ..... دو گزاره استفاده می‌کنیم.</p> <p>ب) به هر عضو فضای نمونه یک ..... می‌گویند.</p> <p>پ) یک تیم والیبال ۱۲ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن‌ها اهمیت داشته باشد و اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این که دومین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد، برابر است با .....</p>		
۱	۳	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>الف) چه تعداد از مجموعه‌های زیر مساوی مجموعه <math>A = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 3m^2\}</math> است؟</p> <p><math>B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\}</math>      <math>C = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 2\}</math>      <math>D = \{m \in \mathbb{Z} \mid  m-1  \leq 1\}</math></p> <p>۰ (۱)      ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)</p> <p>ب) یک راننده تاکسی در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، فضای نمونه چند عضو دارد؟</p> <p>۸ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۶ (۳)      ۲۵ (۴)</p>		
۱/۵	۴	<p>با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی منطقی زیر را اثبات کنید.</p> <p><math>(p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv \sim q</math></p>		
۰/۷۵	۵	<p>ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کرده، سپس نقیض آن را بنویسید.</p> <p><math>\exists x \in \mathbb{Z}; x &lt; 0 \wedge x^2 \leq 1</math></p>		
۱	۶	<p>گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها (<math>\forall</math> یا <math>\exists</math>) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p> <p>«حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.»</p>		
۱	۷	<p>هر گاه <math>A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x &lt; 5\}</math> دامنه متغیر باشد. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) <math>\exists x \in A; x+5=10</math>      ب) <math>\forall x \in A; x^2+2 \leq 18</math></p> <p>پ) <math>\exists x \in A; x^3+3 &lt; 4</math>      ت) <math>\forall x \in A; \frac{x^2-1}{x-1} = x+1</math></p>		
۱	۸	<p>اگر <math>p</math> و <math>q</math> دو گزاره دلخواه باشند، آن‌گاه حاصل هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید.</p> <p>الف) <math>\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \dots\dots\dots</math>      ب) <math>p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \dots\dots\dots</math></p> <p>پ) <math>p \Rightarrow p \equiv \dots\dots\dots</math>      ت) <math>(p \wedge \sim q) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \dots\dots\dots</math></p>		
«ادامه سؤالات در صفحه دوم»				

نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	آزمون نوبت اول: آمار و احتمال
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۲۲	تعداد صفحه: ۲	پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه
ردیف	همه پاسخها را فقط با خودکار مشکی یا آبی و در کادر مشخص شده در پاسخبرگ بنویسید.			نمره
۹	اگر دو عضو از مجموعه $A$ حذف کنیم. تعداد زیرمجموعه‌های آن $384$ واحد کم می‌شود. مجموعه $A$ چند زیرمجموعه محض دارد؟			۱
۱۰	اگر $A, B$ و $C$ سه مجموعه با مرجع $U$ باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه: $A \cap C \subseteq B \cap C$			۰/۷۵
۱۱	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید: $(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$			۱
۱۲	اگر $U$ مجموعه مرجع و $A$ و $B$ دو مجموعه دلخواه باشند، آن‌گاه حاصل هر یک از تساوی‌های زیر را بنویسید: الف) $(A \cap B) \cup (A - B) = \dots\dots\dots$ ب) $A' \cap (A' \cup B) = \dots\dots\dots$ پ) $(A \cup B)' \cap A = \dots\dots\dots$ ت) $A - B \subseteq (A - B)' \Rightarrow A' \cup B = \dots\dots\dots$			۱
۱۳	اگر $A = (-1, 4]$ و $B = \{-2, 3\}$ ، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.			۰/۵
۱۴	اگر $A = \{y + 1, 5, z - 1\}$ و $B = \{x + 2, 4, -2\}$ در این صورت با فرض $A \times B = B \times A$ کمترین حاصل $x + y + z^2$ را بیابید.			۱/۲۵
۱۵	اگر $A$ یک مجموعه دلخواه باشد، ثابت کنید: $A \times \emptyset = \emptyset$			۱
۱۶	عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۴۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که عدد انتخابی نه بر ۶ بخش پذیر باشد و نه بر ۸ بخش پذیر باشد، را محاسبه کنید.			۱/۲۵
۱۷	فرض کنید $A$ و $B$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $S$ باشند. ثابت کنید: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$			۰/۷۵
۱۸	در یک تجربه تصادفی $S = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای بوده و $P(a), P(b), P(c), P(d)$ به همین ترتیب تشکیل دنباله حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{3}$ را می‌دهند، $P(\{a, b, d\})$ را بیابید.			۱/۵
۱۹	در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد متناسب با مجذور همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال این‌که عدد مشاهده شده اول باشد را بیابید.			۱/۲۵
۲۰	در پرتاب ۵ سکه با یکدیگر هر یک از احتمالات زیر را بیابید: الف) احتمال آن‌که سکه چهارم رو بیاید. ب) احتمال آن‌که تعداد سکه‌های رو برابر ۴ باشد.			۱
۲۰	جمع نمره			۲۰
«موفق و پیروز باشید.»				



مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

تاریخ امتحان ۰۴/۱۰/۲۲

آمار و احتمال

آزمون نوبت اول

تعداد صفحات ۳

پایه ۱۱

ریاضی فیزیک

رشته

«راهنمای تصحیح آزمون»

پاسخ سؤال ۱:

الف) صحیح (۲۵/۰ نمره)      ب) صحیح (۲۵/۰ نمره)      پ) صحیح (۲۵/۰ نمره)

پاسخ سؤال ۲:

الف) عطفی (۲۵/۰ نمره)      ب) برآمد (۲۵/۰ نمره)      پ)  $\frac{1}{12}$  (۲۵/۰ نمره)

پاسخ سؤال ۳:

الف) گزینه ۳ (۵/۰ نمره)      ب) گزینه ۴ (۵/۰ نمره)

پاسخ سؤال ۴:

(هر ستون ۲۵/۰ نمره)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim q$	$p \vee \sim q$	$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$
د	د	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

هم ارز

پاسخ سؤال ۵:

درست (۲۵/۰ نمره)

$$\forall x \in \mathbb{Z}; x \geq 0, \sqrt{x^2} > 1 \quad (۵/۰)$$

پاسخ سؤال ۶:

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (۵/۰)$$

ارزش گزاره نادرست است. (۲۵/۰ نمره) زیرا به ازای  $x = -1$  عبارت  $-2 \geq 2$  برقرار نیست. (۲۵/۰ نمره)  
(به جای  $x = -1$  هر عدد منفی دیگری نیز می‌توان قرار داد.)

پاسخ سؤال ۷:

الف) غلط (۲۵/۰ نمره)      ب) صحیح (۲۵/۰ نمره)  
پ) صحیح (۲۵/۰ نمره)      ت) غلط (۲۵/۰ نمره)

پاسخ سؤال ۸:

الف)  $p \Leftrightarrow \sim q$  یا  $\sim p \Leftrightarrow q$  (۲۵/۰ نمره)      ب) T (۲۵/۰ نمره)  
پ) T (۲۵/۰ نمره)      ت) F (۲۵/۰ نمره)

پاسخ سؤال ۹:

فرض کنیم  $A, n$  عضو داشته باشد:



۲۰ دقیقه

مدت امتحان

۰۴/۰۷/۲۲

تاریخ امتحان

آمار و احتمال

آزمون نوبت اول

۳

تعداد صفحات

۱)

پایه

ریاضی فیزیک

رشته

«راهنمای تصحیح آزمون»

$$2^n - 384 = 2^{n-2} \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 2^n - 2^{n-2} = 384 \Rightarrow 2^{n-2}(2^2 - 1) = 384 \Rightarrow 2^{n-2} \times 3 = 384$$

$$\Rightarrow 2^{n-2} = 128 \Rightarrow 2^{n-2} = 2^7 \Rightarrow n-2 = 7 \Rightarrow \underbrace{n=9}_{(0/5)} \Rightarrow 2^9 - 1 = \underbrace{511}_{(0/25)}$$

پاسخ سؤال ۱۰:

$$\forall x; x \in A \cap C \Rightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in C}_{(0/25)} \xrightarrow{A \subseteq B} \underbrace{x \in B \wedge x \in C}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{x \in B \cap C}_{(0/25)}$$

بنابراین  $A \cap C \subseteq B \cap C$

پاسخ سؤال ۱۱:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = \underbrace{(A \cap B) \cap (A' \cup C')}_{(0/25)}$$

$$= \underbrace{[(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']}_{(0/5)} = \emptyset \cup [A \cap (B - C)] = \underbrace{A \cap (B - C)}_{(0/25)}$$

پاسخ سؤال ۱۲:

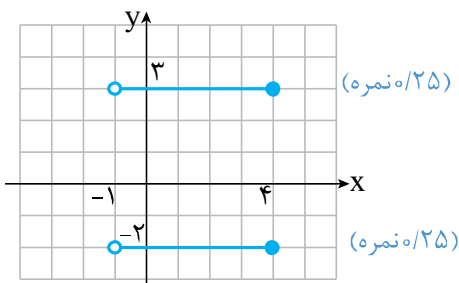
ب)  $A'$  (نمره ۰/۲۵)

الف)  $A$  (نمره ۰/۲۵)

ت)  $U$  (نمره ۰/۲۵)

پ)  $\emptyset$  (نمره ۰/۲۵)

پاسخ سؤال ۱۳:



پاسخ سؤال ۱۴:

$$A \times B = B \times A \xrightarrow{A \text{ و } B \neq \emptyset} A = B \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3 \quad (0/25)$$

$$(0/5) \text{ کمترین } x + y + z^2 = 7 \Rightarrow x = 3 \text{ و } z = -1 \Rightarrow y + 1 = 4 \text{ و } z - 1 = -2 \Rightarrow y = 3 \text{ و } z = -1$$

$$(0/5) \text{ حالت دوم } y + 1 = -2 \text{ و } z - 1 = 4 \Rightarrow y = -3 \text{ و } z = 5 \Rightarrow x + y + z^2 = 25$$

پاسخ سؤال ۱۵:

از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض کنیم  $A \times \emptyset \neq \emptyset$  (فرض خلف) (نمره ۰/۲۵). در این صورت حداقل یک عضو مانند  $(x, y)$  در  $A \times \emptyset$  باید وجود داشته باشد، که در این صورت:

$$(x, y) \in A \times \emptyset \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in A \wedge y \in \emptyset \quad (0/5)$$

چون  $y \in \emptyset$  یک تناقض است (مجموعه  $\emptyset$  فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می‌باشد. (نمره ۰/۲۵)



۲۰ دقیقه

مدت امتحان

۰۴/۰۱/۲۲

تاریخ امتحان

آمار و احتمال

آزمون نوبت اول

۳

تعداد صفحات

۱)

پایه

ریاضی فیزیک

رشته

«راهنمای تصحیح آزمون»

پاسخ سؤال ۱۶:

پیشامد عضوهایی از S که بر ۶ بخش پذیرند: A

پیشامد عضوهایی از S که بر ۸ بخش پذیرند: B

$$S = \{1, 2, \dots, 400\} \Rightarrow n(S) = 400$$

$$n(A) = \left[ \frac{400}{6} \right] = 66 \quad (0/25)$$

$$n(B) = \left[ \frac{400}{8} \right] = 50 \quad (0/25)$$

$$n(A \cap B) = \left[ \frac{400}{24} \right] = 16 \quad (0/25)$$

$$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \quad (0/25)$$

$$= 1 - \left( \frac{66}{400} + \frac{50}{400} - \frac{16}{400} \right) = 1 - \frac{100}{400} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۱۷:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \xrightarrow{(A-B) \cap (A \cap B) = \emptyset} P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۱۸:

$$P(b) = P(a) + \frac{1}{30}, P(c) = P(a) + \frac{2}{30}, P(d) = P(a) + \frac{3}{30}$$

$$P(S) = 1 \Rightarrow P(a) + [P(a) + \frac{1}{30}] + [P(a) + \frac{2}{30}] + [P(a) + \frac{3}{30}] = 1 \quad (0/75)$$

$$4P(a) = \frac{7}{30} \Rightarrow P(a) = \frac{7}{120} \quad (0/25)$$

$$P(\{a, b, d\}) = 1 - P(c) = 1 - \left( \frac{7}{120} + \frac{2}{30} \right) = \frac{29}{40} \quad (0/5)$$

پاسخ سؤال ۱۹:

$x_i$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$P(x_i)$	x	۴x	۹x	۱۶x	۲۵x	۳۶x

$$P(S) = 1 \Rightarrow \underbrace{x + 4x + 9x + 16x + 25x + 36x}_{(0/5)} = 1 \Rightarrow 91x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{91} \quad (0/25)$$

$$P(\{2, 3, 5\}) = P(2) + P(3) + P(5) = 4x + 9x + 25x = 38x = \frac{38}{91} \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۲۰:

الف) احتمال رو شدن هر سکه‌ای از جمله سکه چهارم برابر  $\frac{1}{4}$  است. (۵/نمره)

$$\text{ب) } P = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{5}{5}} = \frac{5}{32} \quad (0/5)$$

← مسئول درس هندسه و ریاضیات گسسته: محمدجمال صادقی