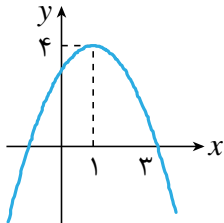


«بسمه تعالی»

نام و نام خانوادگی:		ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	آزمون نوبت اول: حسابان ۱
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه		تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶	تعداد صفحه: ۲	پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه
ردیف	همه پاسخ‌ها را فقط با خودکار مشکی یا آبی و در کادر مشخص شده در پاسخ‌برگ بنویسید.			
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (الف) مجموع ده جمله اول دنباله حسابی $1, 1, 0, 0, x, 3$ برابر ۲۱۰ است. (ب) معادله $ x - 2 = 1$ دارای سه ریشه است. (پ) توابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند. (ت) خط‌های $y = 5x + 2$ و $x + 5y = 15$ بر هم عمودند.			
۱	جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. (الف) معادله درجه دومی که ریشه‌هایش $\sqrt{5} + 2$ و $\sqrt{5} - 2$ باشند عبارت است از (ب) تعداد ریشه‌های معادله $0 = 4x + \sqrt{x^2} + 2\sqrt{x}$ برابر است با (پ) با توجه به تابع $f(x) = 7 + 2x + x^2$ ، بُرد تابع $f(x)$ ، برابر است با (ت) حاصل عبارت $A = [\sin 89^\circ] - [\cos 98^\circ] + 2[-\frac{5}{4}]$ برابر است با			
۱/۵	۳ اگر ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۵ درصدی داشته باشیم، با افزودن چند کیلوگرم نمک به آن می‌توان غلظت محلول را به ۷ درصد رساند؟ (نوشتن محاسبات الزامی است.)			
۱/۵	۴ اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله $0 = x^3 - mx^2 + 4x - 7$ باشد، ابتدا m و سپس سایر ریشه‌ها را <u>در صورت وجود</u> بیابید.			
۲	۵ نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} + 2x$ را رسم کرده و سپس معادله $f(x) = 5$ را به روش هندسی حل کنید و مقدار ریشه‌ها را <u>در صورت وجود</u> به دست آورید.			
۱	۶ شکل زیر مربوط به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.  (الف) ضابطه $f(x)$ را به دست آورید. (ب) حاصل $f(-3)$ را بیابید.			
۱	۷ خط $3x + 4y = 6$ بر دایره‌ای به مرکز $(-1, 4)$ مماس است. مساحت این دایره چقدر است؟			
۱/۵	۸ نقاطی روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن‌ها تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.			
۱/۵	۹ نمودار تابع f را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & ; 0 \leq x \leq 9 \\ [\frac{x}{3}] & ; -6 \leq x < 0 \end{cases}$			
۱	۱۰ آیا توابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ و $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2}$ با هم برابرند؟ چرا؟			
۱	۱۱ ضابطه وارون تابع $f(x) = x^2 + 4x - 2$ را با شرط $x \geq -2$ ، <u>در صورت وجود</u> به دست آورید.			
۱	۱۲ تابع $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 1$ مفروض است. ابتدا دامنه $f(x)$ و سپس نمودار $g(x) = f^{-1} \circ f(x)$ را بیابید و سپس نمودار $g(x)$ را رسم کنید.			
«ادامه سؤالات در صفحه دوم»				

نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک	آزمون نوبت اول: حسابان ۱	
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۰۶	تعداد صفحه: ۲	پایه: یازدهم دوره دوم متوسطه	
نمره	همه پاسخ‌ها را فقط با خودکار مشکی یا آبی و در کادر مشخص شده در پاسخ‌برگ بنویسید.			ردیف
۱/۵	اگر توابع f و g به صورت زیر باشند: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2+1}, \quad g = \{(1,2), (-1,3), (0,4), (-5,1)\}$ الف) دامنه تابع $\frac{g}{f}$ را بنویسید. ب) تابع $f+g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید. پ) حاصل $(\frac{f \times g}{f+3})(0)$ را بیابید.			۱۳
۱/۵	اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{3x+2}$ آن‌گاه: الف) ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید. ب) دامنه تابع $f \circ g$ را محاسبه کنید.			۱۴
۲	با توجه به توابع f و g، ابتدا $D_{f \circ g}$ و $D_{g \circ f}$ و سپس توابع $g \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید. $f = \{(1,7), (-2,4), (3,-5), (1,6)\}$ $g = \{(2,1), (5,2), (4,-1), (6,3)\}$			۱۵
۲۰	جمع نمره			«موفق و پیروز باشید.»



۱۲۰ دقیقه

مدت امتحان

۰۴/۰۶/۰۶

تاریخ امتحان

حسابان ۱

آزمون نوبت اول

۴

تعداد صفحات

۱۱

پایه

ریاضی فیزیک

رشته

«راهنمای تصحیح آزمون»

پاسخ سؤال ۱:

(ب) نادرست (۰/۲۵) (نمره)

(الف) درست (۰/۲۵) (نمره)

(ت) درست (۰/۲۵) (نمره)

(پ) نادرست (۰/۲۵) (نمره)

پاسخ سؤال ۲:

(ب) یک ریشه (۰/۲۵) (نمره)

(الف) $x^2 - 2\sqrt{5}x + 1 = 0$ (۰/۲۵) (نمره)(ت) -5 (۰/۲۵) (نمره)(پ) $R_f = [6, +\infty)$ (۰/۲۵) (نمره)

پاسخ سؤال ۳:

ابتدا باید جرم نمک موجود در محلول را بیابیم: $200 \text{ kg} \times \frac{5}{100} = 10 \text{ kg}$ (۰/۲۵) (نمره)اگر x کیلوگرم نمک اضافه کنیم، آن گاه: $\frac{10+x}{200+x} = \frac{7}{100}$ (۰/۵) (نمره) بنابراین:

$$\underbrace{1000 + 100x = 1400 + 7x}_{(0/25)} \Rightarrow 93x = 400 \Rightarrow x = \frac{400}{93} \text{ kg} \quad (0/5)$$

پاسخ سؤال ۴:

$$x = 1 \xrightarrow[\text{در تابع}]{\text{جاگذاری}} f(1) = 0 \Rightarrow 1 - m + 4 - 7 = 0 \Rightarrow -m = 2 \Rightarrow m = -2 \quad (0/5)$$

حال پس از جاگذاری m در تابع f ، آن را بر $(x-1)$ تقسیم چکشی می‌کنیم:

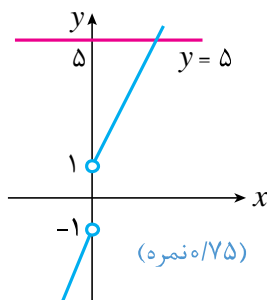
$$\begin{array}{r} f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x - 7 \quad | \quad x-1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 3x^2 + 4x - 7 \\ \underline{-3x^2 + 3x} \\ 7x - 7 \\ \underline{-7x + 7} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 7) = 0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله، ریشه دیگری ندارد} \end{cases} \quad (0/25)$$

* اگر بدون تقسیم چکشی تجزیه به درستی انجام شود نمره کامل تعلق گیرد.

پاسخ سؤال ۵:



$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} + 2x = \underbrace{\frac{x}{|x|}}_{(0/25)} + 2x = \begin{cases} \frac{x}{x} + 2x = 1 + 2x & : x > 0 \quad (0/25) \\ \frac{x}{-x} + 2x = -1 + 2x & : x < 0 \quad (0/25) \end{cases}$$

مطابق شکل می‌بینیم معادله $f(x) = 5$ یک ریشه دارد (۰/۲۵) (نمره) و مقدار آن عبارت است از:

$$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۶:

(الف) راه اول: طبق نمودار سهمی f ، ریشه دیگر سهمی $x = -1$ است، پس:



۲۰ دقیقه

مدت امتحان

۰۴/۱۰/۰۶

تاریخ امتحان

حسابان ۱

آزمون نوبت اول

۴

تعداد صفحات

۱۱

پایه

ریاضی فیزیک

رشته

«راهنمای تصحیح آزمون»

$$\text{ریشه‌ها: } \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}, S(1, 4) \quad (0/25)$$

$$\text{معادله سهمی: } y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 1)(x - 3) \xrightarrow{\text{جاگذاری } S(1,4)} 4 = a(1+1)(1-3) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow 4 = -4a \Rightarrow a = -1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow y = (-1)(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3 \quad (0/25)$$

$$\text{راه دوم: } y = a(x-h)^2 + k, S \begin{cases} h=1 \\ k=4 \end{cases} \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = a(x-1)^2 + 4 \xrightarrow{\text{جاگذاری } (3,0)} 0 = a(3-1)^2 + 4 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow -4 = 4a \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y = -(x-1)^2 + 4 \quad (0/25)$$

$$\text{ب) } f(-3) = (-3)^2 + 2(-3) + 3 = -12 \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۷:

می‌دانیم شعاع وارد بر خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس، عمود است پس شعاع دایره همان فاصلهٔ مرکز تا خط مماس است:
خط: $3x + 4y - 6 = 0$ $(0/25)$

$$\text{مرکز دایره} = (-1, 4) \Rightarrow \text{شعاع دایره} = r = \frac{\sqrt{3(-1) + 4(4) - 6}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5} \Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi r^2 = \pi \times \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49\pi}{25} \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۸:

نقطه مورد نظر که روی خط $y = 2x$ قرار دارد را $M \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{vmatrix}$ می‌نامیم، پس باید: $MO + MA = 5$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha-0)^2 + (2\alpha-0)^2} + \sqrt{(\alpha-2)^2 + (2\alpha-4)^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 16\alpha + 16} = 5 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \sqrt{5\alpha^2} + \sqrt{5\alpha^2 - 12\alpha + 20} = 5$$

$$\frac{\sqrt{5(\alpha^2 - 4\alpha + 4)}}{\sqrt{5(\alpha-2)^2}} = \frac{\sqrt{5}(\alpha-2)}{\sqrt{5}(\alpha-2)} = 1$$

$$\text{راه اول: } \sqrt{5}|\alpha| + \sqrt{5}|\alpha-2| = 5 \xrightarrow{:\sqrt{5}} |\alpha| + |\alpha-2| = \sqrt{5} \quad (0/25)$$

حال این معادله را به روش چند ضابطه‌ای کردن حل می‌کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < 0: -\alpha - \alpha + 2 = \sqrt{5} \Rightarrow 2 - \sqrt{5} = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} < 0 \checkmark \Rightarrow M \begin{vmatrix} \alpha = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \\ 2\alpha = 2 - \sqrt{5} \end{vmatrix} \quad (0/25) \\ 0 \leq \alpha \leq 2: \alpha + 2 - \alpha = \sqrt{5} \Rightarrow 2 = \sqrt{5} \times \quad \text{✗} \\ \alpha > 2: \alpha + \alpha - 2 = \sqrt{5} \Rightarrow 2\alpha = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} > 0 \checkmark \Rightarrow M \begin{vmatrix} \alpha = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \\ 2\alpha = 2 + \sqrt{5} \end{vmatrix} \quad (0/25) \end{array} \right.$$



۲۰ دقیقه

مدت امتحان

۰۴/۱۰/۰۶

تاریخ امتحان

حسابان ۱

آزمون نوبت اول

۴

تعداد صفحات

۱۱

پایه

ریاضی فیزیک

رشته

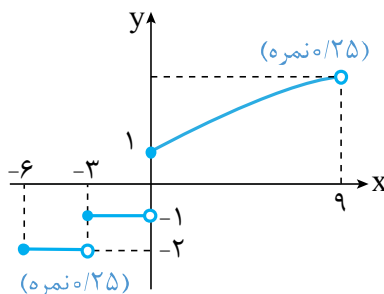
«راهنمای تصحیح آزمون»

$$\text{راه دوم: } \underbrace{\sqrt{5\alpha^2 - 20\alpha + 20}}_{(0/25)} = 5 - \underbrace{\sqrt{5\alpha^2}}_{(0/25)} \rightarrow \text{معادله اولیه}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} \underbrace{5\alpha^2 - 20\alpha + 20 = 25 - 10\sqrt{5\alpha^2} + 5\alpha^2}_{(0/25)} \Rightarrow 10\sqrt{5}|\alpha| = 20\alpha + 5 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \geq 0 \rightarrow 10\sqrt{5}\alpha = 20\alpha + 5 \Rightarrow \alpha = \frac{2+\sqrt{5}}{2} & (0/25) \\ \alpha < 0 \rightarrow -10\sqrt{5}\alpha = 20\alpha + 5 \Rightarrow \alpha = \frac{2-\sqrt{5}}{2} & (0/25) \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۹:



$$-3 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{3} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -1 \Rightarrow y = -1 \quad (0/25)$$

$$-6 \leq x < -3 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{3} < -1 \Rightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = -2 \Rightarrow y = -2 \quad (0/25)$$

$$\text{دامنه } D_f = [-6, 9] \quad (0/25)$$

$$\text{برد } R_f = \{-2, -1\} \cup [0, \sqrt{9}] \quad (0/25)$$

پاسخ سؤال ۱۰:

خیر، با هم برابر نیستند زیرا:

$$D_f : x^2 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq 2 \quad (0/25)$$

$$D_g : \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \geq 2 \Rightarrow \underbrace{D_f \neq D_g}_{(0/25)} \Rightarrow \underbrace{f(x) \neq g(x)}_{(0/25)}$$

$$\text{روش دوم: مثال نقض: اگر } \underbrace{x = -1}_{(0/5)} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \sqrt{3} & (0/25) \\ g(-1) = \sqrt{-1} \times \sqrt{-3} & (0/25) \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۱۱:

$$y = x^2 + 4x - 2 : x \geq -2 \Rightarrow x_s = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 1} = -2 \Rightarrow \text{یک به یک است.} \quad (0/25)$$

$$y = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{(x+2)^2} - 6 \quad (0/25) \Rightarrow \underbrace{y+6 = (x+2)^2}_{(0/25)} \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y+6} = |x+2| \quad \text{نامنفی}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y+6} = x+2 \Rightarrow \sqrt{y+6} - 2 = x \xrightarrow{\text{تعویض جای } y \text{ و } x} y = \sqrt{x+6} - 2 = f^{-1} \quad (0/25)$$



۲۰ دقیقه

مدت امتحان

۰۴/۱۰/۰۶

تاریخ امتحان

حسابان ۱

آزمون نوبت اول

۴

تعداد صفحات

۱)

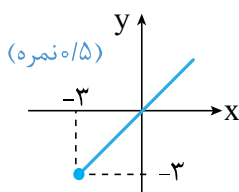
پایه

ریاضی فیزیک

رشته

«راهنمای تصحیح آزمون»

پاسخ سؤال ۱۲:

می‌دانیم: $f^{-1} \circ f(x) = x : x \in D_f$ پس:

$$f(x) = 2\sqrt{x+3} - 1 \Rightarrow D_f : x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \quad (۰/۲۵)$$

$$g(x) = f^{-1} \circ f(x) = x; x \geq -3 \quad (۰/۲۵)$$

پاسخ سؤال ۱۳:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f; f(x) \neq 0$$

$$D_g = \{-5, -1, 0, 1\}, D_f : 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \{-1, 0, 1\} \quad (۰/۵)$$

$$\text{ب) } f(1) = \frac{\sqrt{1}}{1} = \sqrt{1}, f(-1) = \frac{\sqrt{1}}{1} = \sqrt{1}, f(0) = \frac{3}{1} = 3$$

$$f + g = \{(1, \sqrt{1} + 2), (-1, \sqrt{1} + 2), (0, 7)\} \quad (۰/۵)$$

$$\text{پ) } \left(\frac{f \times g}{f+3}\right)(0) = \frac{f(0) \times g(0)}{f(0) + 3} = \frac{3 \times 4}{3 + 3} = \frac{12}{6} = 2 \quad (۰/۵)$$

(در هر قسمت اگر تنها پاسخ نهایی نوشته شود نمره کامل تعلق گیرد.)

پاسخ سؤال ۱۴:

$$\text{الف) } fog(x) = f(g) = \sqrt{4 - g^2} = \sqrt{4 - (\sqrt{3x+2})^2} = \sqrt{4 - (3x+2)} = \sqrt{2-3x} \quad (۰/۵)$$

$$\text{ب) } D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq -\frac{2}{3} \mid \sqrt{3x+2} \in [-2, 2]\} \quad (۰/۵)$$

$$\cancel{\frac{2}{3}} \leq \sqrt{3x+2} \leq 2 \xrightarrow{\text{توان}^2} 0 \leq 3x+2 \leq 4 \xrightarrow{-2} -2 \leq 3x \leq 2 \xrightarrow{\div 3} -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = x \geq -\frac{2}{3} \cap -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}] \quad (۰/۵)$$

پاسخ سؤال ۱۵:

وقتی f و g زوج مرتبی هستند، برای یافتن دامنه تابع مرکب می‌توان، آن تابع مرکب را یافته و سپس دامنه‌اش را تعیین کنید.

$$fog(x) = \{(2, 7), (6, -5)\} \Rightarrow D_{fog} = \{2, 6\} \quad (۰/۵)$$

$$fof(x) = \{\} = \emptyset \Rightarrow D_{fof} = \emptyset \quad (۰/۵)$$

$$gof(x) = \{(-2, -1), (1, 3)\} \quad (۰/۵)$$

$$gog(x) = \{(5, 11)\} \quad (۰/۵)$$

(در هر قسمت اگر تنها پاسخ نهایی نوشته شود نمره کامل تعلق گیرد.)

