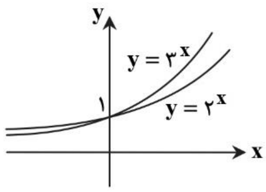
۱-

الف) درست

ب) نادرست؛ یک رادیان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی از دایره است که طول آن کمان، با شعاع دایره برابر است.

ج) درست

د) نادرست



۲-

الف) ندارد؛ دامنهٔ تابع f، $(-۳,+\infty)$ می‌باشد، پس در $x=-۳$ ، همسایگی محذوف قابل تعریف نیست، پس حد وجود ندارد.

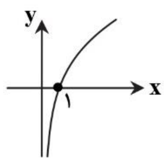
ب) نیستند

$$f(x)=(\sqrt{x})^{\frac{۱}{۲}}=x \quad ; \quad D_f=[۰,+\infty)$$

$$g(x)=\sqrt{x^۲}=|x| \quad ; \quad D_g=\mathbb{R}$$

ج) منفی؛ هر رادیان، تقریباً معادل ۵۷/۳ درجه است. در نتیجه ۳ رادیان تقریباً معادل ۱۷۱/۹ درجه است. پس این زاویه در ربع دوم قرار دارد و مقدار کسینوس آن منفی می‌باشد.

د) $\mathbb{R}$



$$D_f=(۰,+\infty)$$
$$R_f=\mathbb{R}$$

۳-

الف) گزینهٔ ۳

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۴ \ , \quad \lim_{x\to (-۱)^-} f(x)=۱$$

ب) گزینهٔ ۴

ج) گزینهٔ ۲

$$\lim_{x\to ۲}[f(x)]=[۳^-]=۲$$

د) گزینهٔ ۱

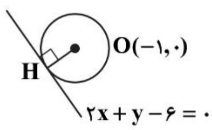
$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(۲\times ۱+۱۹\times ۳)=۱۰\times ۵۹=۵۹۰$$

۴-

الف)

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_\circ,y_\circ)$ از خط $ax+by+c=۰$، برابر $AH=\frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ می‌باشد.

$$OH=\frac{|۲(-۱)+۰-۶|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۵}}$$



ب) کافی است بررسی کنیم فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز دایره برابر شعاع دایره می‌باشد یا خیر

$$OA=\sqrt{(۲-(-۱))^۲+(-۴-۰)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

چون این فاصله برابر شعاع نیست پس نقطه روی دایره قرار ندارد.

-۵

نکته: $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

با توجه به نکته داریم:

الف)

حالت اول: $|x| - 3 = 2 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x \pm 5$

حالت دوم: $|x| - 3 = -2 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

ب) مخرج مشترک که برابر $(x-3)(x-1)$ است را در طرفین معادله ضرب می‌کنیم:

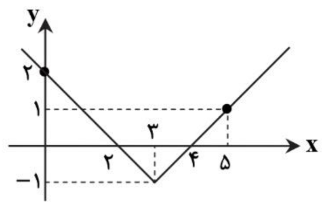
$$x(x-1) + 3(x-3) = 5(x-3)(x-1) \Rightarrow x^2 - x + 3x - 9 = 5x^2 - 20x + 15$$

$$\Rightarrow 0 = 4x^2 - 22x + 24 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 12 = 0 \Rightarrow (2x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 4, \frac{3}{2}$$

هر دو جواب قابل‌قبول است.

-۶

موارد «الف» و «د» قابل‌قبول هستند.



$R_f = [-1, 1]$

علت نادرستی بقیه موارد:

ب) دامنه را تغییر داده است.

ج) هم دامنه باید بازه‌ای باشد که برد زیرمجموعهٔ آن باشد.

-۷

با تقسیم‌بندی بازه داریم:

$$-3 \le x \le 6 \xrightarrow{\div 3} -1 \le \frac{1}{3}x \le 2$$

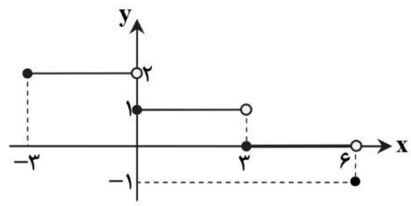
حالت‌بندی:

۱) $-1 \le \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow y = -(-1) + 1 = 2$ ؛ $\downarrow$ $-3 \le x < 0$

۲) $0 \le \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow y = -(0) + 1 = 1$ ؛ $\downarrow$ $0 \le x < 3$

۳) $1 \le \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow y = -(1) + 1 = 0$ ؛ $\downarrow$ $3 \le x < 6$

۴) $\frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow y = -(2) + 1 = -1$ ؛ $\downarrow$ $x = 6$



-۸

الف) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}\ ,\ D_g = [3, +\infty)$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \ge 3 \mid \sqrt{x-3} - 1 \ne 1\}$$

$$\sqrt{x-3} - 1 \ne 1 \Rightarrow \sqrt{x-3} \ne 2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x - 3 \ne 4 \Rightarrow x \ne 7$$

$$D_{fog} = [3, +\infty) - \{7\} = [3, 7) \cup (7, +\infty)$$

نکته: اگر $(a,b) \in f$، آن‌گاه $(b,a) \in f^{-1}$

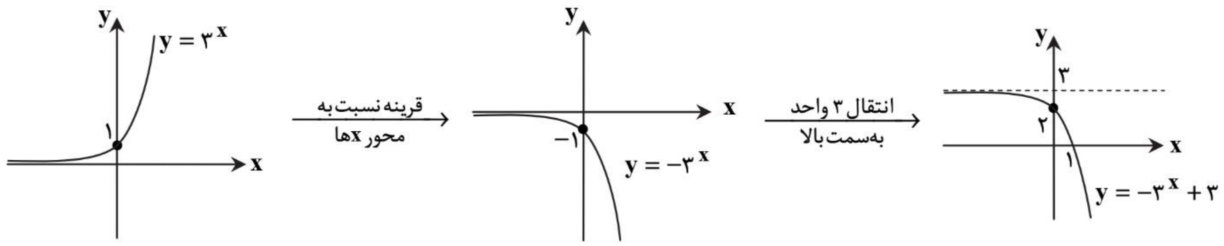
ب) با توجه به نکته ابتدا فرض می‌کنیم $f^{-1}(1) = \alpha$، پس: $f(\alpha) = 1$

$$f(\alpha) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha - 1} = 1 \Rightarrow 1 = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) = 2$$

ج) $(\frac{f}{g})(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{\frac{1}{3-1}}{\sqrt{3-3} - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$

۹-

نمودار را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



۱۰-

نکته: اگر $a > ۰$ و $a \neq ۰$، آن‌گاه از تساوی $\log x = \log y$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$.

نکته: $\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$

با توجه به نکات داریم:

$$\log(۲x+۱) - \log(x-۲)^۲ = \log ۳ \Rightarrow \log\frac{۲x+۱}{(x-۲)^۲} = \log ۳ \Rightarrow \frac{۲x+۱}{(x-۲)^۲} = ۳ \Rightarrow ۳(x-۲)^۲ = ۲x+۱$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۱۲x + ۱۲ = ۲x + ۱ \Rightarrow ۳x^۲ - ۱۴x + ۱۱ = ۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} x_۱ = ۱ \ (\text{غ ق ق}) \ , \ x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{۱۱}{۳} \checkmark$$

۱۱-

نکته: اگر T نیمه‌عمر یک ماده برحسب سال و $m_۰$ جرم اولیه آن باشد، بعد از گذشت t سال جرم باقی‌مانده از رابطهٔ $m(t) = (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{T}} \times m_۰$ به‌دست می‌آید.

با توجه به نکته، داریم:

$$(\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}} \times ۱۰ = ۱ \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{\frac{t}{۱۰}} = \frac{۱}{۱۰} \Rightarrow ۲^{\frac{t}{۱۰}} = ۱۰ \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\log \text{ از طرفین}} \log ۲^{\frac{t}{۱۰}} = \log ۱۰ \Rightarrow \frac{t}{۱۰}\log ۲ = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{t}{۱۰}(۰/۳) = ۱ \Rightarrow \frac{t}{۱۰} = \frac{۱۰}{۳} \Rightarrow t = \frac{۱۰۰}{۳}$$

۱۲-

الف) $\tan(-\frac{۲۵\pi}{۳}) = -\tan(\frac{۲۵\pi}{۳}) = -\tan(۸\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$

$$\cos ۵۷۰^\circ = \cos(۳\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین:

$$\tan(-\frac{۲۵\pi}{۳}) \times \cos ۵۷۰^\circ = -\sqrt{۳} \times (-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۳}{۲}$$

ب)

نکته: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

ابتدا مقدار $\cos\alpha$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \Rightarrow \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع دوم}} \cos\alpha = -\frac{۵}{۱۳}$$

حال به کمک نکته داریم:

$$\cos(\frac{\pi}{۴} + \alpha) = \cos\frac{\pi}{۴}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{۴}\sin\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times (-\frac{۵}{۱۳}) - \frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{۱۲}{۱۳}) \Rightarrow \frac{-۵\sqrt{۲} - ۱۲\sqrt{۲}}{۲۶} = \frac{-۱۷\sqrt{۲}}{۲۶}$$

۱۳-

نکته: $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$

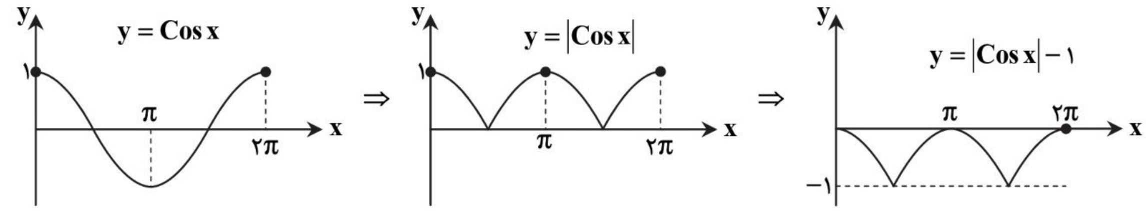
نکته: $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

از سمت چپ تساوی شروع می‌کنیم:

$$\frac{۱ - (۱ - ۲\sin^۲\alpha)}{۲\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{۲\sin^۲\alpha}{۲\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

-۱۴

ابتدا نمودار $y = \cos x$ را رسم کرده و سپس $y = |\cos x|$ و سپس نمودار را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم:



-۱۵

الف)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-\sqrt{x+۲}}{۵x-۱۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-\sqrt{x+۲})(x+\sqrt{x+۲})}{(۵x-۱۰)(x+\sqrt{x+۲})}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}-(x+۲)}{۵(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۱)}{۵(x-۲)(x+\sqrt{x+۲})}$$
$$=\frac{۳}{۵\times(۲+۲)}=\frac{۳}{۲۰}$$

ب)

راه‌حل اول:

$$x-\pi=t \Rightarrow x=t+\pi$$
$$\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}=\lim_{t\to ۰}\frac{t}{\sin(t+\pi)}=\lim_{t\to ۰}\frac{t}{-\sin t}=-\lim_{t\to ۰}\frac{t}{\sin t}=-۱$$

راه‌حل دوم:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x-\pi}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-(\pi-x)}{\sin(\pi-x)}=-۱$$

ج)

نکته: $\cos ۲\alpha=\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱=۱-۲\sin^{۲}\alpha$

راه‌حل اول:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{|۱-\cos ۲x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{|\underbrace{۲\sin^{۲}x}_{+}|}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{\sin^{۲}x}=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

راه‌حل دوم:

با توجه به اینکه وقتی $x\to ۰^-$ ، $۱-\cos ۲x>۰$ است، پس $|۱-\cos ۲x|=۱-\cos ۲x$.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}}{۱-\cos ۲x}\times\frac{۱+\cos ۲x}{۱-\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}(۱+\cos ۲x)}{۱-\cos^{۲} ۲x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^{۲}(۱+\cos ۲x)}{\sin^{۲} ۲x}$$
$$=\frac{۱}{۴}\lim_{x\to ۰^-}\frac{۴x^{۲}}{\sin^{۲} ۲x}\times\lim_{x\to ۰^-}(۱+\cos ۲x)=\frac{۱}{۴}\times ۲=\frac{۱}{۲}$$

-۱۶

نکته: تابع f در $x=a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$.

با توجه به نکته داریم:

$$f(۲)=a-۱\ ,\ \lim_{x\to ۲^+}f(x)=۲+b\ ,\ \lim_{x\to ۲^-}f(x)=۶-[۲^-]=۶-۱=۵\Rightarrow a-۱=۲+b=۵\Rightarrow a=۶\ ,\ b=۳$$