



ردیف	سوالات	بارم																																																															
۱	<p>درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) گزاره «$p \Rightarrow p \vee q$» گزاره همواره درست است. $> 0,25$</p> <p>ب) گزاره «$A \subseteq B$» شرط کافی برای گزاره «$A = B$» می‌باشد. $\text{ن } 0,25$</p> <p>ج) اگر $A = \{-1, 2\}$ و $B = [-1, 2]$، نمودار $A \times B$ به صورت دو پاره خط موازی افقی می‌باشد. $\text{ن } 0,25$</p> <p>د) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، رخ دادن A و B به طور هم‌زمان محال است. $> 0,25$</p>	۱																																																															
۲	<p>هر یک از جملات زیر را با عدد، کلمه یا عبارت مناسب کامل کنید.</p> <p>الف) هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نام دارد. $0,15$</p> <p>ب) از گزاره نمای «$X \subseteq A \wedge X \subseteq A'$» نتیجه می‌گیریم مجموعه X برابر است با \emptyset یا $(A \cap A')$. $0,15$</p> <p>ج) به هر عضو فضای نمونه یک \dots می‌گویند. $0,15$</p> <p>د) هر زیر مجموعه تک عضوی از فضای نمونه‌ای را \dots می‌گویند. $0,15$</p>	۲																																																															
سؤال‌های تشریحی																																																																	
۳	<p>اگر دامنه متغیر گزاره نمای «$2x^2 + 3x + 1 \leq 0$» مجموعه اعداد صحیح باشد، مجموعه جواب آن را بدست آورید.</p> <p>$2x^2 + 3x + 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ $D = \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{-1\}$</p> <p>$0,15$ $0,25$ $0,25$</p>	۱																																																															
۴	<p>گزاره «حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگتر یا مساوی ۲ است.» را به زبان منطق ریاضی بنویسید و ارزش آن را با دلیل تعیین کنید، سپس نقیض گزاره را بنویسید.</p> <p>ارزش نادرست. مثال نقض $x = -2$ (عدد منفی) $0,25$</p> <p>$\Rightarrow -2 - \frac{1}{-2} < 2$ $0,25$</p> <p>$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}; x + \frac{1}{x} \geq 2$ $0,25$</p> <p>$\exists x \in \mathbb{R} - \{0\}; x + \frac{1}{x} < 2$ $0,25$</p> <p>نقیض گزاره: $0,25$</p>	۱/۵																																																															
۵	<p>هم‌ارزی منطقی زیر با استفاده از جدول ارزش‌ها ثابت کنید:</p> <p>$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$</p> <p>۱۶۰، ۱۶۰ ستون آخر هر کدام $0,25$</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>p</th> <th>q</th> <th>r</th> <th>$q \Rightarrow r$</th> <th>$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$</th> <th>$p \wedge q$</th> <th>$(p \wedge q) \Rightarrow r$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>></td><td>></td><td>></td><td>></td><td>></td><td>></td><td>></td></tr> <tr><td>></td><td>></td><td><</td><td><</td><td><</td><td>></td><td><</td></tr> <tr><td>></td><td><</td><td>></td><td>></td><td>></td><td><</td><td>></td></tr> <tr><td>></td><td><</td><td><</td><td>></td><td>></td><td><</td><td>></td></tr> <tr><td><</td><td>></td><td>></td><td>></td><td>></td><td><</td><td>></td></tr> <tr><td><</td><td>></td><td><</td><td><</td><td><</td><td><</td><td><</td></tr> <tr><td><</td><td><</td><td>></td><td>></td><td>></td><td><</td><td>></td></tr> <tr><td><</td><td><</td><td><</td><td>></td><td>></td><td><</td><td>></td></tr> </tbody> </table> <p>$0,15$ $0,25$ $0,25$ $0,25$</p>	p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	>	>	>	>	>	>	>	>	>	<	<	<	>	<	>	<	>	>	>	<	>	>	<	<	>	>	<	>	<	>	>	>	>	<	>	<	>	<	<	<	<	<	<	<	>	>	>	<	>	<	<	<	>	>	<	>	۱/۵
p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$																																																											
>	>	>	>	>	>	>																																																											
>	>	<	<	<	>	<																																																											
>	<	>	>	>	<	>																																																											
>	<	<	>	>	<	>																																																											
<	>	>	>	>	<	>																																																											
<	>	<	<	<	<	<																																																											
<	<	>	>	>	<	>																																																											
<	<	<	>	>	<	>																																																											

مجموعه $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ را در نظر بگیرید:

الف) چند زیرمجموعه محض دارد؟

$\cdot ۲۵$ $۷ = 2^3 - 1 = 2^n - 1 = \text{تعداد زیرمجموعه های محض}$

ب) درستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

۱) $\{a\} \in P(A)$ $\cdot ۲۵$ ۲) $\{\emptyset\} \subseteq P(A)$ $\cdot ۲۵$ ۳) $\{\emptyset, \{a\}\} \not\subseteq P(A)$ $\cdot ۲۵$

$a \in A$
 $\Rightarrow \{a\} \subseteq A$ $\cdot ۲۵$

$\emptyset \in A$
 $\Rightarrow \emptyset \in P(A)$ $\cdot ۲۵$

$\emptyset \in P(A)$
 $\{a\} \in P(A)$ $\cdot ۲۵$
 $\Rightarrow \{\emptyset, \{a\}\} \subseteq P(A)$

ج) اگر یک عضو جدید به این مجموعه اضافه شود، تعداد زیرمجموعه های مجموعه توانی آن چند برابر می شود؟

① $n(P(A_1)) = 2^3 = 8$ ② $n(P(A_2)) = 2^4 = 16$ $\cdot ۲۵$
 $\Rightarrow \frac{2^4}{2^3} = 2 = ۲$ $\cdot ۲۵$
تعداد زیرمجموعه ها $= 2^4 = 16$ $\cdot ۲۵$ تعداد زیرمجموعه ها $= 2^3 = 8$ $\cdot ۲۵$

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ با روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آن گاه $A - B = \emptyset$.

$A \subseteq B$ $\cdot ۲۵$
 $A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in U \mid x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset$
 $\Rightarrow A - B = \emptyset$

با استفاده از قوانین جبر مجموعه ها ثابت کنید:

الف) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

$(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C'$ $\cdot ۲۵$
 $= (A \cap C') \cup (B \cap C')$ $\cdot ۲۵$
 $= (A - C) \cup (B - C)$ $\cdot ۲۵$

ب) اگر $(A \cup B) = (A \cap B)$ آن گاه $A = B$

① $(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A \cap (A \cap B) \Rightarrow A = A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$ $\cdot ۲۵$

② $(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A \cup (A \cup B) = A \cup (A \cap B) \Rightarrow A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$ $\cdot ۲۵$

① , ② $\Rightarrow A = B$ $\cdot ۲۵$

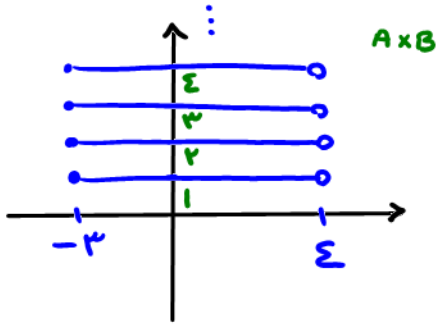
9 و B دو مجموعه ناتهی هستند. ثابت کنید اگر $A \times B = B \times A$ آن گاه $A = B$.

$$\forall x \in A, \forall y \in B \implies (x, y) \in A \times B \xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in B \times A$$

$$\implies x \in B \wedge y \in A \implies A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\implies A = B$$

10 اگر $A = [-3, 4)$ و $B = \mathbb{N}$ باشند، نمودار $A \times B$ را رسم کنید.



صمیم کشیدن خطوط افقی
رعایت نقاط توپر و توخالی
رعایت اعداد منفی و عددی
ادامه دار بودن نمودار (رشته بالا)

11 برای هر دو پیشامد دلخواه A و B ثابت کنید: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

در مجموع $A-B$ و $A \cap B$ ناسازگار هستند و $A = (A-B) \cup (A \cap B)$ پس:

$$P(A) = P((A-B) \cup (A \cap B)) = P(A-B) + P(A \cap B)$$

$$\implies P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$$

12 عددی به تصادف از بین اعداد 1 تا 200 انتخاب می کنیم. احتمال این که عدد انتخابی نه بر 3 بخش پذیر باشد و نه بر 5 چقدر است؟

$$\begin{aligned} A = \text{عدد بر 3 بخش پذیر} &\implies P(A) = \frac{66}{200} \\ B = \text{عدد بر 5 بخش پذیر} &\implies P(B) = \frac{40}{200} \\ A \cap B = \text{عدد بر 15 بخش پذیر} &\implies P(A \cap B) = \frac{13}{200} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &\implies P(A \cup B) = \frac{66 + 40 - 13}{200} = \frac{93}{200} \end{aligned} \right.$$

$$\text{عدد نه بر 3 بخش پذیر و نه بر 5} = A' \cap B' = (A \cup B)' \implies P(A \cup B)' = 1 - \frac{93}{200} = \frac{107}{200}$$

13 در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله حسابی با قدر

نسبت $\frac{1}{5}$ تشکیل دهند، حاصل $P(\{x, z\})$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned} p(x) &= a \\ p(y) &= a + d = a + \frac{1}{5} \\ p(z) &= a + 2d = a + \frac{2}{5} \end{aligned} \implies P(x) + P(y) + P(z) = 3a + \frac{3}{5} = 1$$

$$\implies a = \frac{2}{15}$$

$$P(\{x, z\}) = P(x) + P(z) = a + a + \frac{2}{5} = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده هر عدد، متناسب با همان عدد است، در پرتاب یک مرتبه این تاس، احتمال مشاهده عدد زوج را بیابید.

$$S = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$P(1) = x, P(2) = 2x, P(3) = 3x, P(4) = 4x, P(5) = 5x, P(6) = 6x$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21} \quad \cdot 125$$

$$P(\{2, 4, 6\}) = P(2) + P(4) + P(6) = 2x + 4x + 6x = 12x = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \quad \cdot 125$$