



ردیف	دانش آموزان عزیز: لطفا سوالات را با دقت بخوانید و با کمال خونسردی به آنها پاسخ دهید.	بارم
۱	<p>درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید .</p> <p>الف) جزء صحیح x، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیش تر نباشد .</p> <p>ب) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + x + 2$ باشد، آنگاه $(fog)_{(1)} = (gof)_{(1)}$</p> <p>ج) اگر تابعی وارون پذیر باشد، هر خطی موازی با محور طول ها رسم شود، نمودار آن را حداقل در یک نقطه قطع می کند .</p> <p>د) هم دامنه یک تابع، مجموعه ای است که همواره زیرمجموعه برد آن است .</p>	<p>درست <input checked="" type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input checked="" type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input checked="" type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input checked="" type="checkbox"/></p>
۲	<p>جای خالی را با استفاده از عبارت یا عدد مناسب تکمیل کنید .</p> <p>الف) حاصل $\left[\frac{x}{x+1} \right]$ به ازای $x = \frac{1}{3}$ برابر است .</p> <p>ب) اگر $A(3, 5)$ و $B(6, 1)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مساحت دایره برابر می باشد .</p> <p>ج) معادله درجه دوم دارای ریشه های $2 \pm \sqrt{5}$ است .</p> <p>د) مجموع اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰۰ برابر است .</p>	<p>۱</p>
۳	<p>در دنباله حسابی ...، ۱۴، ۱۰، ۶، ۲ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود ؟</p>	<p>۱/۲۵</p> <p>$a_1 = 2$ $d = 4$</p> <p>$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2} (4 + (n-1)4) = \frac{n}{2} (1+n-1)$</p> <p>$= 2n \times n = 2n^2 > 200$</p> <p>$\Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \Rightarrow \underline{n \geq 11}$</p> <p>حاصل ۱۱ جمله را باید جمع کنیم</p>
۴	<p>در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله دوم برابر ۶ و جمله چهارم برابر ۵۴ است . مجموع شش جمله اول دنباله را تعیین کنید .</p>	<p>۱/۲۵</p> <p>$a_2 = a_1 q = 6$ $a_4 = a_1 q^3 = 54$</p> <p>$\Rightarrow \frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 q^3}{a_1 q} = q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$</p> <p>$q > 0$ $\rightarrow q = 3 \Rightarrow a_1(3) = 6 \Rightarrow a_1 = 2$</p> <p>$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{2(1-3^6)}{1-3} = \frac{2(1-729)}{-2} = 729 - 1 = \underline{728}$</p>

۵

۰/۷۵

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 8x + 1 = 0$ باشد، حاصل $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$ را به دست آورید.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-8}{2} = 4$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{16 - 1}{\frac{1}{2}} = 30$$

۶

۱/۵

اگر یکی از ریشه های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر معادله را محاسبه کنید.

معادله $2 \rightarrow 2(\Sigma a - 7) = 2 \Rightarrow \Sigma a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$

$$2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$$

چون 2 ریشه است
پس $x - 2$ جزو 2 است

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 2x - 2 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{-(2x^3 - 4x^2)} \\ 3x^2 - 2x - 2 \\ \underline{-(3x^2 - 6x)} \\ 4x - 2 \\ \underline{-(4x - 8)} \\ 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = (x - 2)(2x^2 + 3x + 1)$$

$-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ مجموع ریشه های 2

۷

۲

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{2x-1} = 2-x \rightarrow 2x-1 = \Sigma + 2x^2 - 4x$

$x \leq 2 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow 0 = (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, 2$

✓
عقود

ب) $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \Rightarrow \frac{2(x-2) - 4}{2(x-2)} = \frac{x-4}{(x-2)}$

$$\Rightarrow \frac{2x-12}{2} = x-4 \Rightarrow x(x-4) = 2x-12 \Rightarrow x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 2, 6$$

عقود (ریشه های)

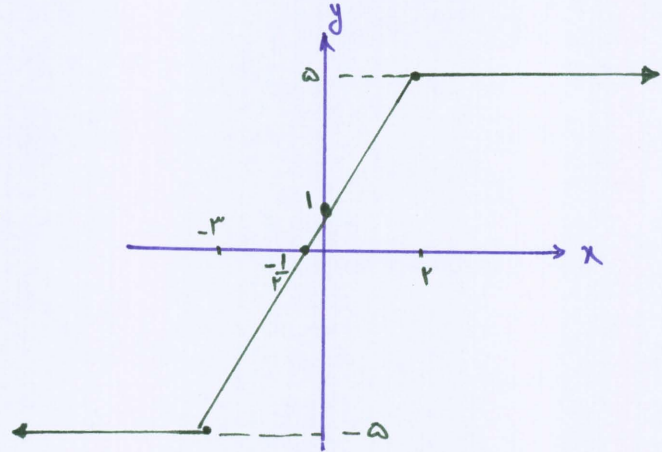
ج) $||x| - 2| = 3$

$$|x-2| = 3 \rightarrow |x| = 5 \rightarrow x = \pm 5$$

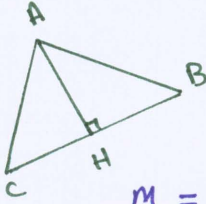
$$|x+2| = 3 \rightarrow |x| = -1 \text{ عقود}$$

تابع f با ضابطه $f(x) = |x+3| - |x-2|$ را به صورت یک تابع چندضابطه ای بنویسید. سپس آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} a & x \geq 2 \\ 2x+1 & -3 \leq x < 2 \\ -a & x < -3 \end{cases}$$



طول ارتفاع وارد بر ضلع BC در مثلث بارنوس $A(-1, 3)$ ، $B(-4, 2)$ و $C(2, -1)$ را محاسبه کنید. سپس مساحت مثلث را به دست آورید.



برای به دست آوردن ارتفاع وارد بر ضلع BC، ابتدا معادله خط BC را پیدا می‌کنیم. برای این کار، ابتدا شیب خط BC را محاسبه می‌کنیم.

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1 - 2}{2 - (-4)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$y = m_{BC}x + b \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + b \xrightarrow{C(2, -1)} -1 = -\frac{1}{2} + b \rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow x + 2y = 0$$

$$AH = \frac{|-1 + 2(3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \sqrt{a}$$

$$S_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{3\sqrt{5} \times \sqrt{a}}{2} = \frac{3\sqrt{5a}}{2}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

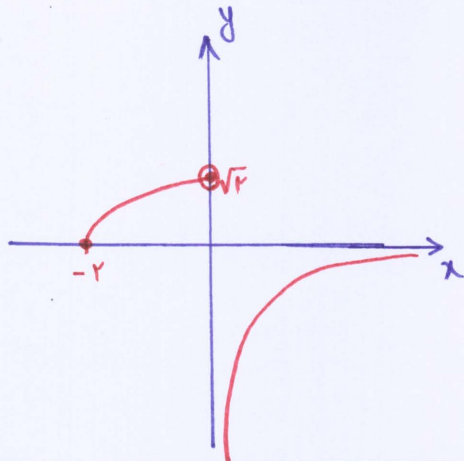
آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ و $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$ مساوی اند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

برای بررسی اینکه آیا دو تابع مساوی هستند، باید دامنه و ضابطه آنها را مقایسه کنیم.
 شرط برابری دامنه: $D_f = D_g$
 شرط برابری ضابطه: $f(x) = g(x)$
 برای $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ ، دامنه $x(x-1) \geq 0$ است که به $x \geq 1$ یا $x \leq 0$ منتهی می‌شود.
 برای $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$ ، دامنه $x \geq 0$ و $x-1 \geq 0$ است که به $x \geq 1$ منتهی می‌شود.
 بنابراین $D_f \neq D_g$ و دو تابع مساوی نیستند.

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f, g \text{ هم‌نام نیستند}$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & -2 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را بنویسید.



$$D_f = [-2, +\infty) - \{0\}$$

$$= [-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, \sqrt{2})$$

نمودار تابع $f(x) = -\left[\frac{1}{3}x\right] + 1$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید. (بازه بندی قبل از رسم لازم می باشد)

$$-4 \leq x \leq 2 \quad +3 \Rightarrow -2 \leq \frac{1}{3}x \leq 2$$

حالت‌های:

$$1) -2 \leq \frac{1}{3}x < -1 \rightarrow y = -(-2) + 1 = 3$$

$$\hookrightarrow -4 \leq x < -3$$

$$2) -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \rightarrow y = -(-1) + 1 = 2$$

$$\hookrightarrow -3 \leq x < 0$$

$$3) 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \rightarrow y = -(0) + 1 = 1$$

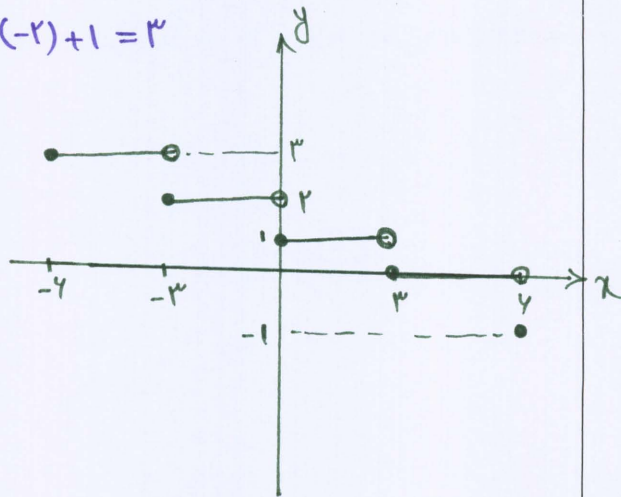
$$\hookrightarrow 0 \leq x < 3$$

$$4) 1 \leq \frac{1}{3}x < 2 \rightarrow y = -(1) + 1 = 0$$

$$\hookrightarrow 3 \leq x < 6$$

$$5) \frac{1}{3}x = 2 \rightarrow y = -(2) + 1 = -1$$

$$\hookrightarrow x = 6$$



ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ را به دست آورید. سپس دامنه و برد f^{-1} را بنویسید.

$$D_f = [2, +\infty) = R_{f^{-1}} \quad y = \sqrt{x-2} + 1$$

$$R_f = [1, +\infty) = D_{f^{-1}} \rightarrow y-1 = \sqrt{x-2}$$

$$\rightarrow (y-1)^2 = x-2 \rightarrow (y-1)^2 + 2 = x$$

$$\rightarrow \overline{f^{-1}}(y) = (y-1)^2 + 2 \rightarrow \overline{f^{-1}}(x) = (x-1)^2 + 2$$

توابع $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ و $g(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ مفروض اند.

الف) دامنه تابع $(f \circ g)(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $(f \circ g)(x)$ را بنویسید.

ج) حاصل $(f \circ g)(3)$ را محاسبه کنید.

$$D_f = (-1, +\infty)$$

$$D_g = (-\infty, 3]$$

$$\text{الف) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \leq 3 \mid 2 - \sqrt{3-x} > -1\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = (-2, 3]$$

$$3 > \sqrt{3-x} \rightarrow 9 > 3-x$$

$$\rightarrow x > -2$$

$$\text{ب) } f(g(x)) = f(2 - \sqrt{3-x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{3-x} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{3-x}}}$$

$$\text{ج) } (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2 - \sqrt{3-3}) = f(2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

توابع $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\}$ و $g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2})\}$ را در نظر بگیرید.

الف) تابع $(f \circ g)$ را بنویسید.

ب) تابع $g \circ f$ را مشخص کنید.

ج) حاصل $(\frac{f}{g})(1)$ را به دست آورید.

$$\text{الف) } f \circ g = \{(-1, -2), (1, -\frac{3}{2})\}$$

$$D_{(f \circ g)} = D_f \cap D_g = \{1, -1\}$$

$$\text{ب) } g \circ f = \{(0, \sqrt{2}), (1, 2)\}$$

$$\text{ج) } \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$